

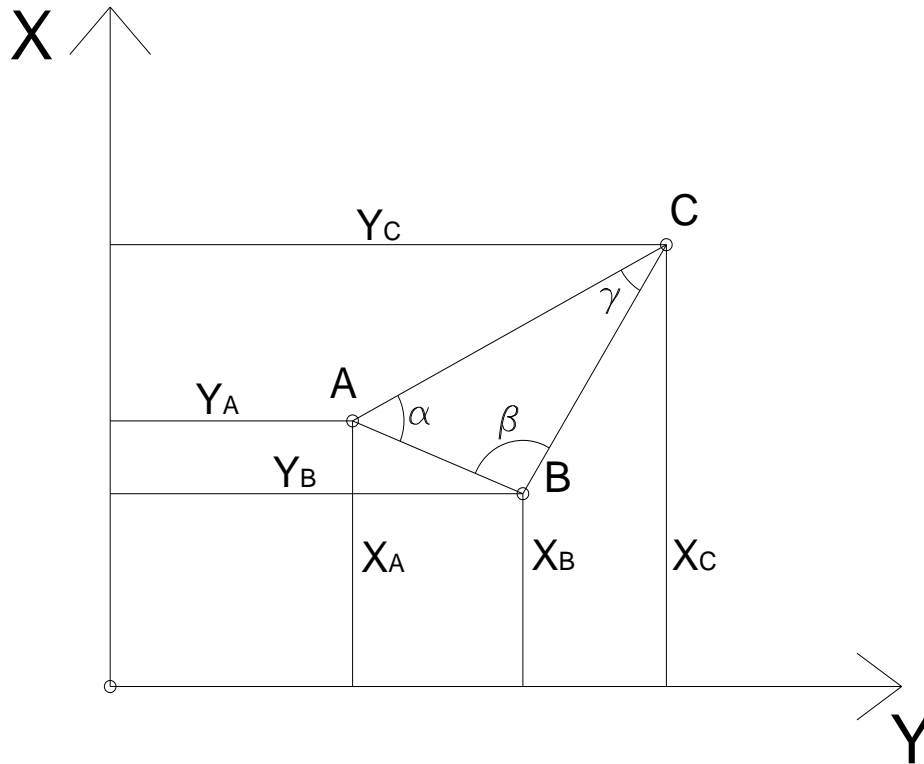
III Predavanje - zadaci

1. Date su koordinate tjemena trougla ABC. Skicirati trougao i pomoću razlike direkcionih uglova stranica trougla sračunati njegove unutrašnje uglove.

Napomena: Radi lakšeg računanja koordinate tačaka su date u lokalnom koordinatnom sistemu.

| Tačka | Y (m) | X (m) |
|-------|-------|-------|
| A | 20.68 | 21.86 |
| B | 35.21 | 15.87 |
| C | 47.45 | 36.36 |

Skica trougla se dobija nanošenjem približnih koordinata u lokalni koordinatni sistem i ona za date podatke izgleda na sledeći način:

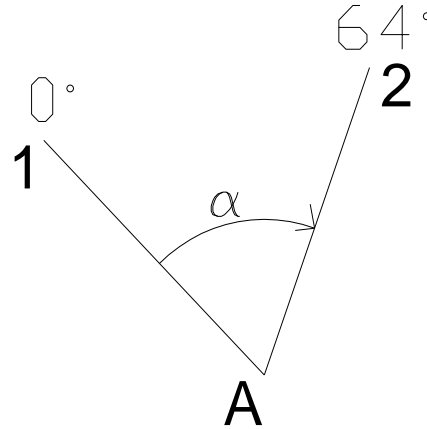


Na slici je unutrašnji ugao kod tjemena A označen sa α , kod tjemena B sa β i kod tjemena C sa γ .

Da bi se riješio ovaj zadatak treba se podsjetiti kako se mjeri ugao. Ugao se uglomjerom mjeri na način što se centar uglomjera postavi u tjeme ugla, lijevi krak poklopi sa nulom uglomjera i na skali gdje su nanešene vrijednosti očita na kojem podeoku se nalazi desni krak. U slučaju na slici ispod ugao kod tjemena A iznosi: $\angle 1 A 2 = \alpha = 64^\circ$.

Dakle, ugao se dobija kao razlika čitanja na desnom kraku ugla i čitanja na lijevom kraku ugla. Pošto se u ovom slučaju lijevi krak ugla poklapa sa nulom uglomjera tada je vrijednost ugla jednaka vrijednosti čitanja na desnom kraku ugla tj:

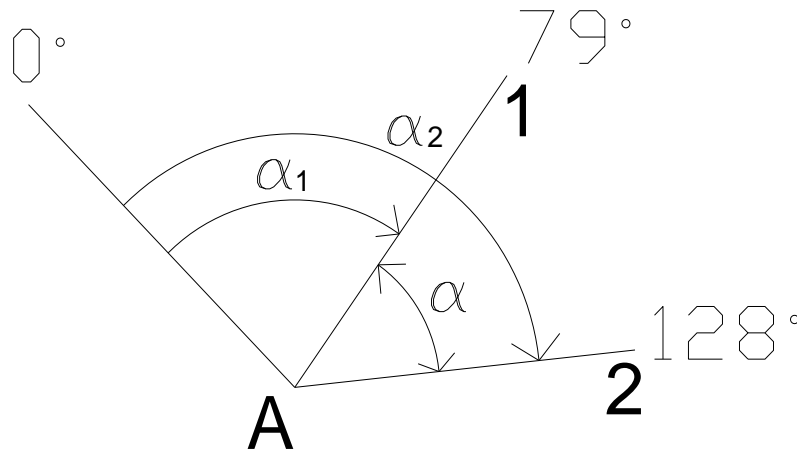
$$\alpha = 64^\circ - 0^\circ = 64^\circ$$



Prilikom mjerenja ugla nije uvijek moguće poklopiti pravac lijevog kraka sa pravcom nule uglomjera. Ovakvi slučajevi se gotovo uvijek dešavaju prilikom mjerenja uglova geodetskim instrumentima. I ovdje važi opšte pravilo da se ugao dobija kao razlika čitanja na desnom kraku ugla i čitanja na lijevom kraku ugla. U geodeziji se ovo zove razlika pravaca. Pravac je ugao od nule uglomjera u smjeru kazaljke na časovniku do zadanog pravca. Dakle, ugao se uvijek dobija kao razlika vrijednosti desnog i lijevog pravca. Pod lijevim pravcem se podrazumijeva početni krak u uglu a pod desnim pravcem se podrazumijeva krak u uglu koji se nalazi u smjeru kazaljke na časovniku od početnog kraka.

Na slici ispod vrijednost ugla se dobija kao:

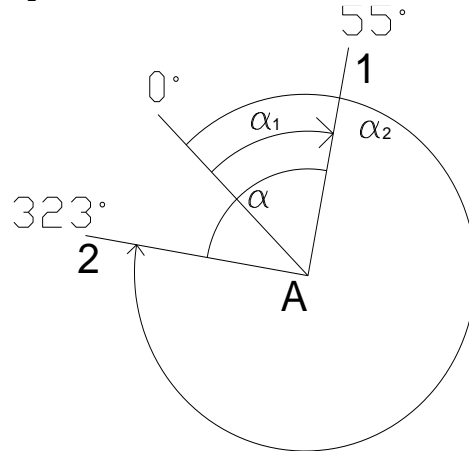
$$\angle 1 A 2 = \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 128^\circ - 79^\circ = 49^\circ$$



Pošto je položaj nule uglomjera proizvoljan u odnosu na položaj kraka koji definišu ugao, u praksi se može desiti i da se desni krak ugla nalazi sa njene desne strane a lijevi krak ugla sa lijeve strane kao na slici ispod. I u ovom slučaju važi opšte pravilo da se ugao dobija kao razlika pravaca: desni pravac – lijevi pravac. Pošto se u proračunu dobija negativan ugao, prava vrijednost će se dobiti kada se na dobijenu vrijednost doda

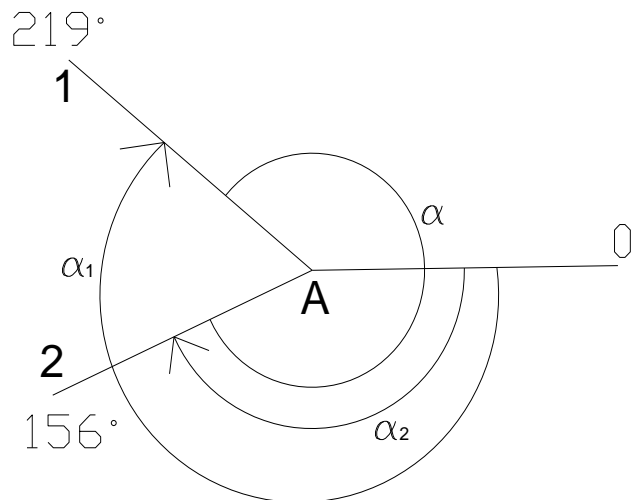
360° (dodavanjem i oduzimanjem ove vrijednosti ne mijenja se vrijednost ugla). U ovom slučaju to bi iznosilo:

$$\angle 1 A 2 = \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 55^\circ - 323^\circ = -268^\circ (+360^\circ) = 92^\circ$$

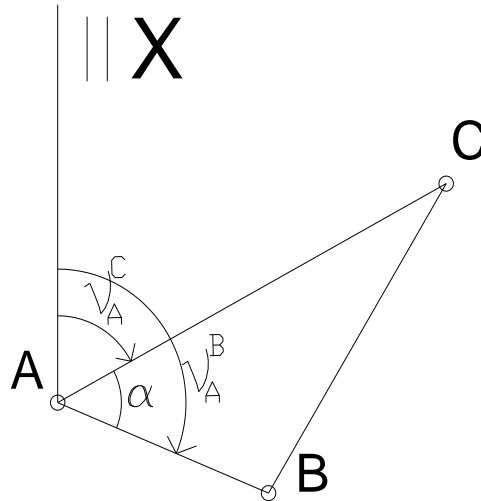


Još jedan primjer računanja ugla dat je na slici ispod. U ovom slučaju lijevi pravac je čitanje na tački 1 - α_1 a desni pravac – krak u smjeru kazaljke na časovniku – čitanje na tački 2 - α_2 . Ovdje se ugao α dobija kao:

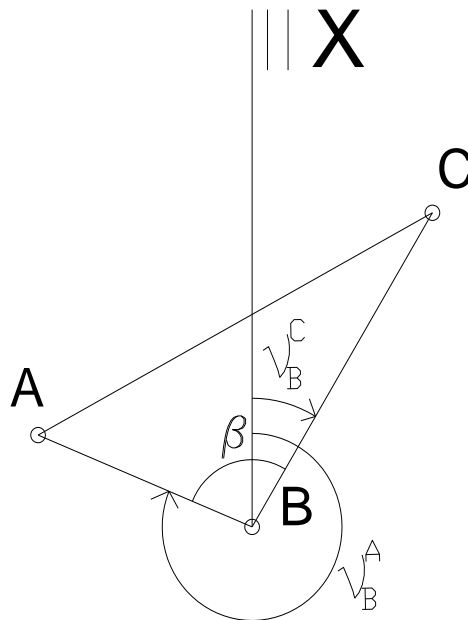
$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 156^\circ - 219^\circ = -63^\circ (+360^\circ) = 297^\circ$$



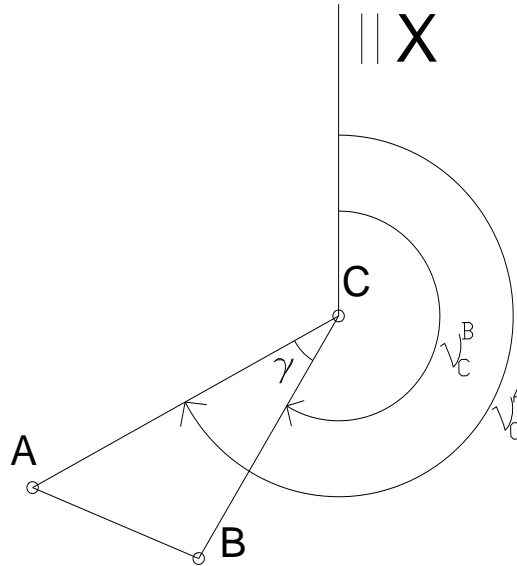
Poznajući ova pravila možemo ih upotrijebiti za rješavanje zadatka. Sa slike ispod se vidi da se ugao α može dobiti iz razlike direkcionih uglova $\alpha = \nu_A^B - \nu_A^C$. Ovdje se dobijanje ugla α može posmatrati kao razlika pravaca gdje je nula uglomjera paralela sa X osom provučena kroz tjeme ugla, direkcionni ugao ν_A^B desni pravac i direkcionni ugao ν_A^C lijevi pravac.



Za računanje unutrašnjeg ugla β biće upotrijebljeni direkcioni uglovi koji polaze iz tjemena B - ν_B^C i ν_B^A . I o ovom slučaju biće iskorišćeno pravilo da se ugao dobija kao razlika pravaca (desni pravac minus lijevi pravac). Nula uglomjera se opet poklapa sa paralelom sa X osom povučenom kroz tjeme ugla pa je sa slike $\beta = \nu_B^C - \nu_B^A$. Pošto je ovo slučaj kada se nula uglomjera nalazi između kraka koji definišu ugao, njegova vrijednost biće negativna pa je na nju potrebno dodati 360° .



Ugao γ se dobija kao razlika direkcionih uglova povučenih iz tjemena C - ν_C^A i ν_C^B . I u ovom slučaju nulu uglomjera će zamijeniti paralela sa X osom provučena kroz tjeme ugla, vrijednost desnog pravca biće ν_C^B a lijevog ν_C^A . Sada se vrijednost unutrašnjeg ugla γ dobija kao: $\gamma = \nu_C^A - \nu_C^B$



Pošto su definisane formule za računanje svih unutrašnjih uglova, sada se mogu računati direkcioni uglovi iz čijih se razlika oni dobijaju.

Poznajući formule za računanje direkcionih uglova za različite položaje duži u ravni, može se preći na računanje njihovih vrijednosti:

$$v_A^B = \arctg \left| \frac{\Delta X}{\Delta Y} \right| + 90^\circ, \text{ gdje je } \Delta X = X_B - X_A \text{ a } \Delta Y = Y_B - Y_A$$

Uvrstivši zadate vrijednosti koordinata tačkaka A i B dobijaju se koordinatne razlike:

$$\Delta X = 14.53 \text{ m i } \Delta Y = -5.99 \text{ m,}$$

$$\text{Iz ovih vrijednosti direkcioni ugao je } v_A^B = 112^\circ 24' 14''.$$

Zatim, sledeći direkcioni ugao:

$$v_A^C = \arctg \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right|, \text{ gdje je } \Delta X = X_C - X_A \text{ a } \Delta Y = Y_C - Y_A$$

$$\text{Odakle se dobija: } \Delta X = 14.50 \text{ m i } \Delta Y = 26.77 \text{ m,}$$

$$\text{pa je } v_A^C = 61^\circ 49' 28''.$$

I direkcioni ugao duži CB:

$$v_C^B = \arctg \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right| + 180^\circ, \text{ gdje je } \Delta X = X_B - X_C \text{ a } \Delta Y = Y_B - Y_C$$

Odakle se dobija: $\Delta X = -20.49\text{m}$ i $\Delta Y = -12.24\text{m}$,

pa je $v_C^B = 211^\circ 28' 01''$.

Kada su sračunata ova tri direkciona ugla za računanje preostala tri može se upotrijebiti pravilo:

$$v_M^N = v_N^M \pm 180^\circ \text{ (+se koristi ako je } v_N^M < 180^\circ \text{ a -ako je } v_N^M > 180^\circ \text{)}$$

Na osnovu sračunatih vrijednosti sada se mogu sračunati i preostali direkcion uglovi. Na ovaj način se dobija da je:

$$v_B^A = 272^\circ 24' 14'' , v_C^A = 241^\circ 49' 28'' \text{ i } v_B^C = 31^\circ 28' 01'' .$$

Pri ovome treba imati u vidu da će se eventualna greška pri računanju prva tri direkciona ugla odraziti i na ovako dobijene direkционе uglove u odnosu na njih.

Ranije su izvedene formule za računanje unutrašnjih uglova u trouglu:

$$\alpha = v_A^B - v_A^C , \beta = v_B^C - v_B^A \text{ i } \gamma = v_C^A - v_C^B .$$

Uvrstivši vrijednosti dobijenih direkcionih uglova u ove formule dobijaju se vrijednosti:

$$\alpha = 50^\circ 34' 46'' , \beta = 99^\circ 03' 47'' \text{ i } \gamma = 30^\circ 21' 27'' .$$

Kontrola dobijenih rezultata je da je suma unutrašnjih uglova u trouglu 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Usled zaokruživanja sračunatih uglova na cijelu vrijednost sekunde, i ovaj zbir može odstupati do $3''$ od teorijske vrijednosti.

Napomena:

Nakon sračunata prva dva unutrašnja ugla (npr. α i β), treći ugao se može dobiti kao dopuna njihovog zbira do 180° .

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) .$$

Ovdje treba imati u vidu da na ovaj način nemamo kontrolu dobijenih rezultata, tj. da ako je načinjena neka greška prilikom računanja direkcionih uglova ona se na ovaj način neće otkriti.